В задачах 1.4-1.7 составить экономико-математические модели

1.4.

Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной, при условии, что изделий В надо выпустить не менее, чем изделий А.

Решение.

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1-количество изделий вида А, тонн, x_2 - количество изделий вида В, штзапланированных к производству.Для их изготовления потребуется ($12\ x_1 + 4x_2$) единиц ресурса I, ($4x_1 + 4x_2$) единиц ресурса II,

($3x_1 + 12x_2$) единиц ресурса III. Так как, потребление ресурсов I, II, III не должно превышать их запасов, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x1 \ge 0$, $x2 \ge 0$.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2.

Суммарная прибыль А составит $30x_1$ от реализации продукции А и $40x_2$ от реализации продукции В, то есть : $F = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow max$.

1.5.Рацион для питания животных состоит из двух видов кормов 1 и 2. Один кг корма вида 1 стоит 80 ден.ед. и содержит 1 ед. жиров, 3 ед белков, 1 ед углеводов, 3 ед нитратов. Один кг корма 2 стоит 10 ден ед и содержит 3 ед жиров,1 ед белков, 8 ед углеводов, 4 ед нитратов. Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед, белков не менее 9 ед, углеводов не менее 8 ед, нитратов не более 16 ед.

Решение.

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1-количество корма 1, тонн, x_2 - количество корма II в дневном рационе птицы, кг.

Для удобства представим условие задачи в таблице

Таблица - Исходные данные задачи о смесях

питательные вещества	**содержание веществ в единице массы корма, ед.**		**требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	
жиры	1	3	6
белки	3	1	9
углеводы	1	8	8
нитраты	3	4	16
цена единицы массы корма, р	80	10	

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 8x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$.

Целевая функция: $F = 80x_1 + 10x_{2.}$ →min.

1.6. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	50
В	6	5	100	200	40
С	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за **10 суток.**

Решение.

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_{ij}-время в течении которого оборудование j-го типа занято изготовлением продукцииi–го вида.

Aij - норма выпуска i-го аппарата на j-й линии в сутки.
Pi - план выпуска i-го аппарата.
Bij - затраты на выпуск i-го аппарата на j-й линии.

Тогда x_1(A), x_1(B), x_1(C)-время в течении которого первая линия будет занята выпуском аппаратов A,B,C.

Далее x_2(A), x_2(B), x2(C)- время в течении которого вторая линия будет занята выпуском аппаратов A,B,C.

По условию задачи ораничение по времени(ни одна линия не должна потратить больше десяти суток) для любого j: Sum(i) Xij <= 10:

¿

Ограничение на план(уельзя производить меньше, чем запланировано) для любого i

Sum(j) Xij*Aij >= Pi:

$$\begin{cases} 4x1(A)+3x2(A)\geq 50 \\ 6x1(B)+5x2(B)\geq 40 \\ 8x1(C)+2x2(C)\geq 50 \end{cases}$$

Кроме того,$x_1(A)\geq0$, $x_1(B)\geq0$, $x_1(C)\geq0$,$x_2(A)\geq0$, $x_2(B)\geq0$, $x2(C)\geq0$

Целевая функция, собственно(Затраты на производство должны быть минимальны)
Sum(i,j) Xij*Bij -> min:
F= $400x_1(A)+100\,x_1(B)+300x_1(C\,)+300x_2(A)+200\,x_2(B)+400\,x2(C)\rightarrow\min$.

Или она же длалее:

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим через x_{1a}, x_{1b} и x_{1c} – время, в течение которого 1-я линия будет занята выпуском аппаратов А, В и С соответственно. Аналогично, обозначим через x_{2a}, x_{2b} и x_{2c} – время, в течение которого 2-я линия будет занята выпуском аппаратов А, В и С соответственно.

Так как время работы каждой линии ограничено 10-ю сутками, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} \le 10 \\ x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} \le 10. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для выполнения плана по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} 4x_{1a} + 3x_{2a} \ge 50 \\ 6x_{1b} + 5x_{2b} \ge 40 \\ 8x_{1c} + 2x_{2c} \ge 50. \end{cases} \tag{2.15}$$

Кроме того, по смыслу задачи

$$\begin{gathered} x_{1a} \ge 0, x_{1b} \ge 0, x_{1c} \ge 0, \\ x_{2a} \ge 0, x_{2b} \ge 0, x_{2c} \ge 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Затраты на производство планового количества аппаратов А, В и С выражаются следующей целевой функцией:

$$Z(\overline{X}) = 400x_{1a} + 100x_{1b} + 300x_{1c} + 300x_{2a} + 200x_{2b} + 400x_{2c}. \tag{2.17}$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи примет вид: *найти такое решение* $\overline{X} = (x_{1a}, x_{1b}, x_{1c}, x_{2a}, x_{2b}, x_{2c})$, *удовлетворяющее системам* (2.14) *и* (2.15) *и условию* (2.16), *при котором целевая функция* (2.17) *принимает минимальное значение*:

$$Z(\overline{X}) = 400x_{1a} + 100x_{1b} + 300x_{1c} + 300x_{2a} + 200x_{2b} + 400x_{2c} \to \min.$$

Постановка задачи

Фирма «Gloria» выпускает 5 видов товаров из джинсовой ткани (жилетки, куртки, юбки, шорты, джинсовые брюки). Их производство ограниченно наличием сырья, временем пошива и денежными средствами.

Всего в швейном отделе фирмы работает 40 человек, следовательно, суммарно в день они нарабатывают 320 часов, т.е. 1600 часов в неделю = 96000 мин.

	Количество человек (= кол-ву операций) для пошива 1 ед одежды	Среднее кол-во времени на одну операцию (мин)	Затраченное время на пошив 1й единицы одежды (мин)

Жилетки	3	9	27
Куртки	5	9	45
Юбки	3	9	27
Шорты	3	9	27
Джинсовые брюки	4	9	36

Количество ткани, привозимой раз в неделю равно 1700метров. Располагаемые денежные средства на оплату пошива изделий рабочими =200000р

Каждая из видов приносит: 1800р,3700р,1500р,1300р,2900р

Ресурсы	жилетки	куртки	юбки	шорты	джинсовые брюки	Наличие
Материалы (м)	1,40	2	1	1,1	1,80	1700
Финансы (руб)	100	170	90	90	105	100000
Время (мин)	27	45	27	27	36	96000
Прибыль	1800	3700р	1500р	1300р	2900р	

Необходимо создать производственный план, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Экономико-математическая модель задачи:

$F=1800x_1+3700x_2+1500x_3+1300x_4+2900x_5 \rightarrow max$

Ограничения на ресурсы:

$1{,}40x_1+2x_2+1x_3+1{,}10x_4+1{,}80x_5 \leq 1700$

$100x_1+170x_2+90x_3+90x_4+105x_5 \leq 100000$

$27x_1+45x_2+27x_3+27x_4+36x_5 \leq 96000$

Ограничение на выпуск:

$100 \leq x2 \leq 320$

1.7.Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 и 3 м; при этом должно получиться равное количество брусков каждого размера. Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилины (в один комплект входит по одному бруску каждого размера).

Решение.

Определим сначала все возможные способы распила бревен, указав соответствующее число получающихся при этом брусьев и остаток.

Способы распила бревен

Способ распила	Число получающихся брусьев			Остаток
	2 м	3 м		
1	1	1		0
2	2	-		1

Через x_i обозначим число бревен распиливаемых i-м способом, $i=\overline{1,3}$, а через x – число комплектов брусьев.Учтем, что число брусьев должно удовлетворять условию комплектности.

Тогда экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1+x_2=20 \\ x_1+2x_2 \quad =x \\ x_1=x \\ \end{cases}$$

$$F=x \rightarrow \max$$

$$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0.$$

Или , исключая x из второго уравнения получим:

$$\begin{cases} x_1=20 \\ x_2 \quad =0 \\ \end{cases}$$

$$F=x_1 \rightarrow \max$$

$$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0.$$

2. Составьте математическую модель задачи.

Для изготовления определенного изделия требуется три планки – одна размером 1,2 м и две по 1,5 м каждая. Для этой цели можно использовать имеющийся запас реек – 400 штук, длиной по 5 м каждая, и 100 штук, длиной по 6,5 м каждая. Определите, как разрезать все эти рейки, чтобы получить наибольшее количество изделий.

Решение.

Варианты раскроя рейки, для этого составим расчетную таблицу:

Размеры планки	Варианты раскроя(длиной по 5 м)				
	1	2	3	4	

Планка 1,2	1	2	3	-	
Планка 1,5	2	1	-	3	
отходы	0,8	1,1	1,4	0,5	
Размеры планки	Варианты раскроя(длиной по 6,5 м)				
	1	2	3	4	5
Планка 1,2	1	2	4	-	5
Планка 1,5	3	2	1	4	-
отходы	0,8	1,1	0,2	0,5	0,5

Введем необходимые обозначения: x_{ij} – число реек из $i-$ той партии $(i=1,2)$, которое следует разрезать $j-$м способом. Рассмотрим соотношения:

$$\frac{x11+2x12+3x13+0x14+x21+2x22+4x23+5x25}{1},$$

$$\frac{2x11+x12+3x14+3x21+2x22+1x23+4x24}{2}$$

Обозначим через Z – минимальное из этих соотношений (это и будет количество комплектной продукции). Следовательно, экономико-математическая модель примет вид:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=100$

$$\frac{x11+2x12+3x13+0x14+x21+2x22+4x23+5x25}{1}\geq z,$$

$$\frac{2x11+x12+3x14+3x21+2x22+1x23+4x24}{2}\geq z$$

x_{ij}, Z – Целые неотрицательные. Для удобства записи заменим двухиндексные переменные x_{ij}, Z на одноиндексные переменные y_j так как это показано в таблице раскроя z=y10. Тогда ЭММ задачи примет вид:

$y10 \rightarrow max$

При ограничениях:

$y1+y2+y3+y4=400$

$y5+y6+y7+y8+y9=100$

$y1+2y2+3y3+0y4+y5+2y6+4y7+5y9-y10\geq 0$

$2y1+y2+3y4+3y5+2y6+y7+4y8-2y10\geq 0$

yj , j=1..10-целые неотрицательные.

Экономическая модель транспортной задачи

Обозначим x_{ij} - количество продукта, доставляемого от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда модель имеет следующий вид:

$L = 2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{41} + 3x_{42} + x_{43} \to \min$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 15$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 30$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 40$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 40$

или

объемы такой продукции.

$A = \begin{pmatrix} 540 \\ 660 \\ 780 \end{pmatrix}$; $c = (4\ 2\ 1)$; $B = (180\ 720\ 360\ 480)$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 10 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Построение экономико-математической модели

Запишем начальные условия задачи в форме табл. 1.

Таблица 1

Поставщики	Мощности поставщиков	Себестоимость продукции	Пункты потребления и их спрос			
			B_1	B_2	B_3	B_4
			180	720	360	480
A_1	540	4	3+4=7	6+4=10	5+4=9	1+4=5
			x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

A_2	660	2	8+2=10	5+2=7	10+2=12	6+2=8
			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
A_3	780	1	9+1=10	7+1=8	4+1=5	6+1=7
			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Обозначим через x_{ij} ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$) количество продукции, которое планируется перевезти от поставщика A_i потребителю B_j, а через f - суммарные затраты на производство и перевозку.

Непосредственно в таблице подсчитываем суммарные тарифы на производство и перевозку продукции из пункта A_i ($i = \overline{1,3}$) в пункт B_j ($j = \overline{1,4}$).

Целевая функция задачи запишется в виде:

$$f = 7x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 10x_{21} + 7x_{22} + 12x_{23} + 8x_{24} +$$
$$+ 10x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34}. \qquad (1)$$

Запишем ограничения, накладываемые мощностями поставщиков:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$¿ 540;
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$¿ 660; (2)
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$¿ 780.

Спрос пунктов потребления выражаем в виде равенств:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 180;$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 720; \qquad (3)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 360;$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 480.$$

Если исключить обратные перевозки, должны выполняться ограничения:

x_{ij}¿ 0 ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,4}$). (4)

Соотношения (1) - (4) образуют экономико-математическую модель рассматриваемой задачи: целевая функция (1), описывающая транспортные затраты, минимизируется при ограничениях (2) - (4).

11.6. В течение месяца мастерская может выполнять три вида работ А, В, С при средней трудоемкости работ: А-3 часа, В-3 часа, С-3 часа. Мастерской установлен план прибыли не менее 1500 д.е. и план обслуживания услугой В не менее 500 клиентов. Прибыль от выполнения работ: А-3 д.е., В-1 д.е., С-1,5 д.е. Количество сырья составляет 5000 д.е., а нормы расходов сырья на единицу продукции равно: А-3 ед., В-2 ед., С-3 ед. Составьте план выполнения услуг в количестве и ассортименте, обеспечивающий наименьшие трудозатраты.

Решение.

Для удобства условия задачи запишем в таблицу и составим экономико-математическую модель задачи

Виды работ	Затраты		Прибыль о работ,д.е.
	Трудоемкость,ч	Сырье, д.е.	
А	3	3	3
В>500	3	2	1
С	3	3	1,5
Запасы, д.е.	-	5000	>1500

Пусть х1-количество выполняемых ежемесячно работ работ вида А,х2-количество выполняемых ежемесячно работ работ вида В,х3-количество выполняемых ежемесячно работ работ вида С.

Тогда ЗЛП примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=5000 \\ 3x_1+x_2+1,5x_3>1500 \\ \quad\quad x_2>1500 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$F = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow max.$

12

Хозяйство может приобрести не более пятнадцати трехтонных автомашин и не более тринадцати пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика 4000 ден. ед., а пятитонного – 5000 ден. ед. Хозяйство может выделить для приобретения автомашин 105000 ден. ед. Сколько нужно приобрести автомашин каждой грузоподъёмности, чтобы их суммарная грузоподъёмность была максимальной.

Решение.

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1-количество трехтонных автомашин, шт, x_2 - количество пятитонных машин, шт запланированных к покупке. На приобретение грузовиков необходима сумма $(4000\ x_1 + 5000x_2) \le 105000$. По условию $0 \le x1 \le 15$, $0 \le x2 \le 13$

По смыслу задачи переменные $x\,1 \ge 0$, $x\,2 \ge 0$.

Теперь введем целевую функцию –грузоподъемность машин, что составляет

$L=3x1+5x2 \rightarrow max.$

Задание на расчетно-графическую работу

по дисциплине «Исследование операций»

Задача №1. Анализ изменений запасов ресурсов

Предварительно необходимо решить задачу линейного программирования графическим методом и определить связывающие и не связывающие ограничения.

Для нечетных вариантов(1,3,5,7…):

Для изготовления двух видов продукции используется три вида сырья. При производстве единицы продукции первого вида затрачивается A_1кг сырья первого вида, A_2 кг сырья второго вида и A_3кг сырья третьего вида. При производстве единицы продукции второго вида затрачивается $Б_1$ кг сырья первого вида, $Б_2$ кг сырья второго вида и $Б_3$ кг сырья третьего вида. Запасы сырья первого вида составляют *Запасы1* кг, второго – *Запасы2* кг, третьего – *Запасы3* кг. Прибыль от реализации единицы продукции первого вида составляет C_1 ден. ед., прибыль от реализации единицы продукции второго вида составляет C_2 ден. ед.

Определить, на сколько можно увеличить (уменьшить) запас дефицитного (не дефицитного) ресурса для улучшения (сохранения) оптимального значения целевой функции? Необходима сводная таблица по результатам расчетов для всех ограничений.

Вариант	**А 1**	**А 2**	**А 3**	**Б 1**	**Б 2**	**Б 3**	**Запасы 1**	**Запасы 2**	**Запасы 3**	**С1**	**С 2**
11	7	8	6	3	12	8	250	190	210	18	16

Решение.

Данные задачи занесем в таблицу

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	*B*	
I	7	3	250
II	8	12	190
III	6	8	210
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	18	16	

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1-количество изделий вида 1, шт, x_2 - количество изделий вида 2, шт запланированных к производству.Для их изготовления потребуется ($7x_1 + 3x_2$) единиц ресурса I, ($8x_1 + 12x_2$) единиц ресурса II, ($6x_1 + 8x_2$) единиц ресурса III. Так как, потребление ресурсов I, II, III не должно превышать их запасов, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} 7x1 + 3x2 \le 250 \\ 8x1 + 12x2 \le 190 \\ 6x1 + 8x2 \le 210 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x1 \ge 0$, $x2 \ge 0$.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2.

Суммарная прибыль составит $18x_1$ от реализации продукции 1 и $16x_2$ от реализации продукции 2, то есть : $L = 18x_1 + 16x_2 \rightarrow max$.

Построим область допустимых решений

В первую очередь, найдем область допустимых решений, т.е. точки x_1 и x_2 , которые удовлетворяют системе ограничений.

По условию задачи $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,т.е. мы рассматриваем только те точки, которые принадлежат первой четверти.

Шаг 1

Рассмотрим неравенство 1 системы ограничений.

$7x_1 + 3x_2 \le 250$

🎬 Построим прямую.

Заменим знак неравенства на знак равенства .

$7x_1 + 3x_2 = 250$

Преобразуем уравнение следующим образом .

$$\frac{x_1}{1/7} + \frac{x_2}{1/3} = 250$$

Каждый член уравнения разделим на 250 .

$$\frac{x_1}{250/7} + \frac{x_2}{250/3} = 1$$

Мы получили уравнение прямой в отрезках.
Данная форма записи позволяет легко нарисовать прямую.
На оси x_1 рисуем точку с координатой 250/7 .
На оси x_2 рисуем точку с координатой 250/3 .
Соединяем полученные точки и получаем необходимую прямую.

Какие точки нас интересуют?

$7 x_1 + 3 x_2 \leq 250$

$3 x_2 \leq -7 x_1 + 250$

$x_2 \leq -7/3 x_1 + 250/3$

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

Шаг 2

Рассмотрим неравенство 2 системы ограничений.

$8 x_1 + 12 x_2 \leq 190$

Построим прямую.

Заменим знак неравенства на знак равенства .

$8 x_1 + 12 x_2 = 190$

Преобразуем уравнение следующим образом .

$$\frac{x_1}{1/8} + \frac{x_2}{1/12} = 190$$

Каждый член уравнения разделим на 190 .

$x_1 \;+\; x_2 \;= 1$

[redacted] [redacted]
95/4 95/6

Мы получили уравнение прямой в отрезках.
Данная форма записи позволяет легко нарисовать прямую.
На оси x_1 рисуем точку с координатой 95/4 .
На оси x_2 рисуем точку с координатой 95/6 .
Соединяем полученные точки и получаем необходимую прямую.

🎬 Какие точки нас интересуют?

$8\ x_1 + 12\ x_2 \leq 190$

$12\ x_2 \leq -8\ x_1 + 190$

$x_2 \leq -2/3\ x_1 + 95/6$

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

Шаг 3

Рассмотрим неравенство 3 системы ограничений.

$6\ x_1 + 8\ x_2 \leq 210$

🎬 Построим прямую.

Заменим знак неравенства на знак равенства .

$6\ x_1 + 8\ x_2 = 210$

Преобразуем уравнение следующим образом .

x_1 x_2
[redacted] + [redacted] = 210
1/6 1/8

Каждый член уравнения разделим на 210 .

x_1 x_2
[redacted] + [redacted] = 1
35 105/4

Мы получили уравнение прямой в отрезках.
Данная форма записи позволяет легко нарисовать прямую.
На оси x_1 рисуем точку с координатой 35 .
На оси x_2 рисуем точку с координатой 105/4 .
Соединяем полученные точки и получаем

необходимую прямую.

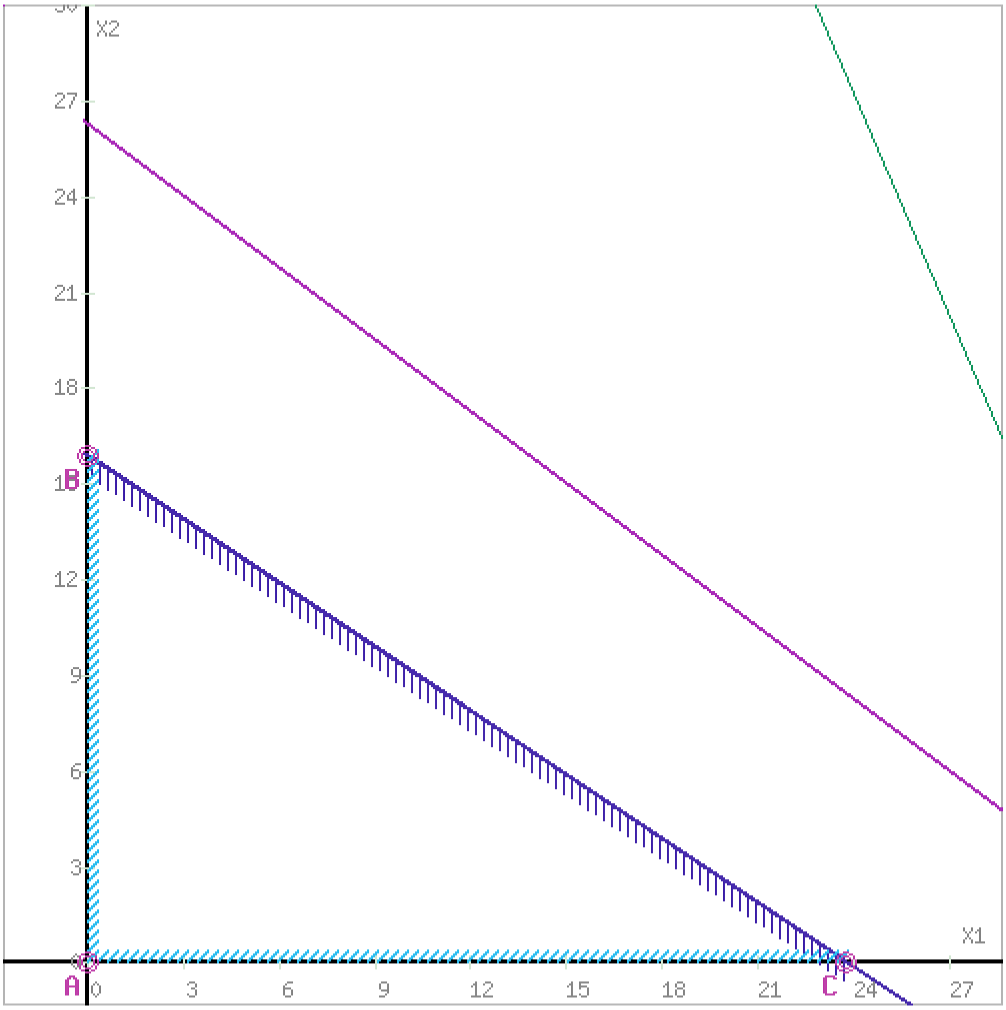
🎬 Какие точки нас интересуют?

$6\ x_1 + 8\ x_2 \leq\ 210$

$8\ x_2 \leq\ -6\ x_1 + 210$

$x_2 \leq\ -3/4\ x_1 + 105/4$

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.



Шаг 4

Вернемся к нашей исходной функции L .

$L =\ 18\ x_1 + 16\ x_2$

Допустим значение функции L равно 1 (абсолютно произвольно выбранное число), тогда

$1 =\ 18\ x_1 + 16\ x_2$

Данное уравнение является уравнением прямой на плоскости.

Из курса аналитической геометрии известно, что данная прямая перпендикулярна вектору, координатами которого являются коэффициенты функции, а именно вектору ON = (18,16).

Следовательно, с геометрической точки зрения, функция L изображается как множество прямых перпендикулярных вектору ON = (18,16).

Построим вектор ON = (18,16).

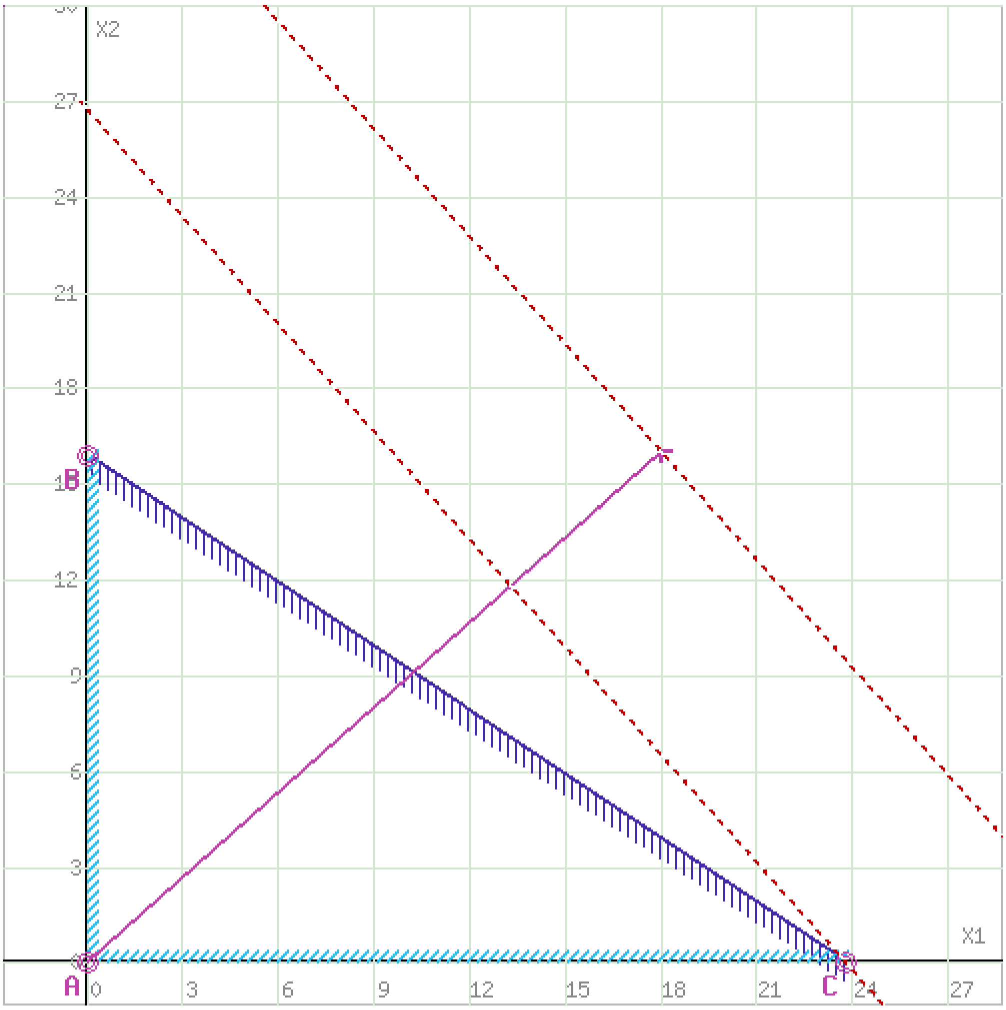
Вектор ON изображен розовым цветом.

Значение функции L будет возрастать при перемещении прямой в направлении вектора ON.

Диапазон перемещения прямой HE от точки O до точки N, а именно, в направлении от точки O к точке N.

Будем перемещать прямую, перпендикулярную вектору ON, до тех пор, пока она полностью не пройдет область допустимых решений.

В нашем случае, касание прямой, перед выходом из области допустимых решений, произойдет в вершине C (95/4,0).
В точке C значение функции L будет наибольшим.



Ответ :

$L_{max} = 855/2$

$x_1 = 95/4$ $x_2 = 0$

Значит необходимо выпускать 95/4 штук изделий вида 1, чтобы получить максимальную прибыль в размере 855/2 ден ед

Через точку C(95/4,0) определяющую оптимальный план проходят прямые BC и AC. Соответствующие им ограничение $8x_1+12x_2\le190$ является активным, а соответствующий вид сырья номер 2 является дефицитным. Рассмотрим увеличение запасов сырья номер 2(то есть правой части ограничения). Это увеличение можно представить как перемещение прямой BC параллельно самой себе до точки пересечения прямой 6x1+8x2=210. Тогда ограничение BC остается активным, точка (35,0) будет определять оптимальное решение, ресурс 2 увеличиться до 8*35+12*0=280. При этом величина дохода составит 18*35+16*0=630 ден ед. Таким образом увеличение объема ресурса номер 2 с190 до 280 приведет к увеличению выпуска продукции первого типа от 23,75 до35 и увеличению прибыли от 855/2 до 630 ден ед.

Определим диапазон изменения запасов недефицитных ресурсов, при котором оптимальное решение не меняется. Через точку С не проходят прямые 7x1+3x2=250,6x1+8x2=210, являются пассивными, а соответствующие им ресурсы недефицитными. Уменьшение запаса сырья номер 2 с 250 до 166,25 не изменить оптимального плана. Так же уменьшение запаса сырья номер 3 с 210 до 142,5 не изменит оптимального плана. Однако еще более существенное уменьшение запасов сырья первого и второго видов приведет к уменьшению прибыли и другому оптимального плану.

ограничение	Изменение от	до	Оптимальные значения	Значение целевой функции
8x1+12x2=190	190	280	(23,75,0)⇒(35,0)	855/2⇒630
7x1+3x2=250	250	142,5	(23,75,0)	855/2⇒855/2
6x1+8x2=210	210	142,5	(23,75,0)	855/2⇒855/2

Задача №2. Определение наиболее выгодного ресурса.

Условие из задачи №1, вопрос – какому из ресурсов(питательных веществ) следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Необходима сводная таблица по результатам расчетов теневой цены для всех ограничений.

Решение.

Вычислим ценность дополнительной единицы дефицитного ресурса

$Y=\frac{630-855/2}{280-190}=2.25$

Так как внашей задаче дефицитный ресурс один то дополнительные средства и выгодно вкладывать в закупку второго ресурса.

Задача №3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции.

Условие из задачи №1, вопросы:

1) Каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения? Т.е. как можно варьировать цены на выпускаемый продукт(корм) при неизменной прибыли от продажи продукта или при неизменной стоимости рациона?
2) На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Решение.

Определим диапазон изменения цены на продукцию вида1 . Пусть цена на продукцию вида 2 не меняется .Тогда линия уровня $c1x1+16x2=a$ может совпадать с прямой ВС у которой угловой коэффициент -2/3. У параллельных прямых угловые коэффициенты совпадают, поэтому $-2/3=-c1/16 \Rightarrow c1=32/3$. При этому доход фирмы станет равным 32/3*23,75+0=253,333, то есть упадет.

Если же цену на продукцию вида 1 оставить без изменения, а цену 2 менять, тогда линия уровня $18x1+c2x2=a$ может совпасть с прямой ВС. Тогда $c2=3$. При этом доход фирмы станет равным 18*23,75+0=855/2, то есть останется на прежнем уровне. Значит от цены на товар 2 вообще не зависит прибыль предприятий, а ценуна товар 2 изменять нельзя так как это приведет к уменьшению прибыли.

Задача

Предприятие имеет три группы станков, объемы загрузки которых ограничены и составляют соответственно 30, 24 и 3 станков-часов. Производительность каждой группы станков по двум типам деталей А и Б составляет по деталям А 10, 15 и 20 деталей в час, а по деталям Б-20, 40 и 60 деталей в час. Найти время загрузки каждой группы станков, чтобы получить максимальное общее количество деталей обоих типов, и соответствующее число каждого типа.

Решение.

Составим математическую модель задачи

x1 - время работы станка 1 для производства продукции А
x2 - время работы станка 2 для производства продукции А
x3 - время работы станка 3 для производства продукции А
Если станок производит детали 2-х типов, то общее время его работы равно суммарному времени работы по изготовлению деталей каждого из двух типов.
Целевая функция:
f(x)=10x1+20(30-x1)+15x2+40(24-x2)+20x3+60(3-x3)=-10x1-25x2-40x3+1740→max
и ограничения:

$$\begin{array}{llll} x_1 & & \le 30 & (1) \\ & x_2 & \le 24 & (2) \\ & & x_3 \le 30 & (3) \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$
Решим задачу симплекс методом
Шаг:1
Избавимся от неравенств в ограничениях, введя в ограничения 1, 2, 3 неотрицательные балансовые переменные $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$, $\mathbf{s_3}$.

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & + s_1 & & & = 30 \quad (1) \\ & x_2 & & & + s_2 & & = 24 \quad (2) \\ & & x_3 & & & + s_3 & = 30 \quad (3) \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$
Шаг:2
Ищем в системе ограничений базисные переменные.
Из последней системы ограничений можно выделить базисные переменные$\mathbf{s_1,s_2,s_3}$.
Теперь мы можем сформировать начальную симплекс-таблицу.
Шаг:3
Начальная симплекс-таблица

БП	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	**Решение**	**Отношение**
$\mathbf{s_1}$	1	0	0	1	0	0	30	--
$\mathbf{s_2}$	0	1	0	0	1	0	24	--
$\mathbf{s_3}$	0	0	1	0	0	1	30	--
Q	-10	-25	-40	0	0	0	-1740	--

В таблице записано оптимальное решение, т.к. в строке целевой функции нет положительных коэффициентов.

Ответ:

Оптимальное значение функции Q(x)= 1740

достигается в точке с координатами:

x_1= 0

x_2= 0

x_3= 0

s_1= 30

s_2= 24

s_3= 30

Значит время работы каждого станка для производства продукции А равно 0.Значит надо производить только изделия вида В. Время работы каждого станка для производства продукции В соответственно равно 30,24,3 часов соответственно. При этом максимальное общее количество деталей обоих типов составит 1740 штук. Первый станок даст 600 деталей типа В, второй 960 деталей типа В и третий 180 деталей типа В.

Для изготовления изделия требуется три планки - одна размером 1,2 м и две по 1,5 м каждая. Для этой цели можно использовать имеющийся запас реек-400 штук, длиной по 5 м каждая, и 100 штук, длиной по 6,5 м каждая. Определите, как разрезать все эти рейки, чтобы получить наибольшее количество изделий.

Решение.

Определим сначала все возможные способы распила реек, указав соответствующее число получающихся при этом планок и остаток.

Способы распила реек

Способ распила	Число получающихся планок			Остаток
	1,2 м	1,5 м	1,5	
1(дл 5)	1	1	1	0,8
2(дл 5)	-	1	2	0,5
3(дл 5)	2	1	-	1,1
4(дл 6,5)	-	2	2	0,5
5(дл 6,5)	2	1	1	1,1
6(дл 6,5)	1	2	1	0,8

Через x_i обозначим число реек распиливаемых i-м способом, $i=\overline{1,6}$.
Обозначим через F_k фактическое количество заготовок k, то есть

F_1 – фактическое количество заготовок 1,20 м;

F_2 – фактическое количество заготовок 1,50 м;

F_3 – фактическое количество заготовок 1,50 м.

Обозначим через ***N1=400*** количество материала (количество реек длиной 5 м), которое следует разрезать, чтобы выполнить заказ.
Обозначим через ***N2=100*** количество материала (количество реек длиной 6,5 м), которое следует разрезать, чтобы выполнить заказ.

Тогда экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=500 \\ x_1+2x_3\ \ +2x5+x6\ \ =F1 \\ x_1+x2+x3+2x4+x5+2x6=F2 \\ x1+2x2+2x4+x5+x6=F3 \end{cases}$$

$$F=x1+x2+x3+x4+x5+x6 \rightarrow \max$$

$$xi\geq 0.$$

11.1. Требуется купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е. Красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупку выделяется не менее 300 д.е. В каком количестве требуется купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

Решение.

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_1-число акварельных красок необходимых для покупки, коробок, x_2 – число цветных карандашей, коробок x_3 –число линеек,x_4 – число блокнотов.Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 30x_1+20x_2+12x_3+10x_4\leq 300 \\ x_1\geq 3 \\ x_1+x_2=x_4 \\ x_3\leq 5 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x1\geq 0,\ x2\geq 0,\ x3\geq 0,\ x4\geq 0.$

Конечную цель решаемой задачи выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2,x_3,x_4.

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max.$